第46講　空間ベクトル(2)

例題46－1

四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．辺ADの中点をM，辺CDを1：3に内分する点をN，△ABCの重心をGとするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{NG}}$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 46 ー 1

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．辺 OA を 2：1 に内分する点を P，辺 BC の中点を Q，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 46 ー 2

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある．辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．また，$\overrightarrow{MN}$ の大きさを求めよ．

(3) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 46 ー 2

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある．辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として，次の問いに答えよ．

⑴　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

⑵　$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．また，$\overrightarrow{AR}$ の大きさを求めよ．

⑶　$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 46 − 3

(1)　空間の 3 点 A(3, 2, 6), B(5, −1, 4), C(x, y, 0) が同一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ．

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M，△BDE の重心を N とするとき，3 点 C，N，M は一直線上にあることを示せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 46 － 3

(1)　空間の 3 点 A(a, -1, 5), B(4, b, -7), C(5, 5, -13) が同一直線上にあるとき, a, b の値を求めよ.

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P, 線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とする. $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とするとき, 3 点 A, Q, G は一直線上にあることを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 46 ー 4

空間の 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, −1), D(1, 2, z) が同一平面上にあるとき, z の値を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 46 ー 4

空間の 4 点 A(3，1，2)，B(4，2，3)，C(5，2，5)，D(−2，−1，z) が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　空間ベクトル(2)

(1)　1辺の長さが2の正四面体OABCにおいて，辺OA，BCを1：2に内分する点をそれぞれL，Mとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア ，$\overrightarrow{LM}=-\dfrac{1}{\text{イ}}\vec{a}+\dfrac{\text{ウ}}{\text{イ}}\vec{b}+\dfrac{1}{\text{イ}}\vec{c}$，

$|\overrightarrow{LM}|=\dfrac{\text{エ}\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$ である．

また，$\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{OC}=$ キ である．

(2)　4点A(1，1，0)，B(3，4，5)，C(1，3，6)，D(4，5，z)が同一平面上にあるとき，$z=$ ク である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

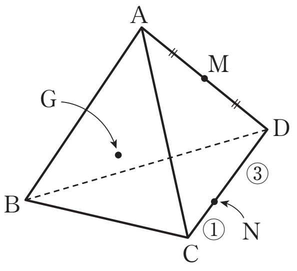
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　空間ベクトル(2)

例題46－1

四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とする．辺ADの中点をM，辺CDを1：3に内分する点をN，△ABCの重心をGとするとき，次のベクトルを$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{MN}$　　(2)　$\overrightarrow{NG}$



$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{4}=\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

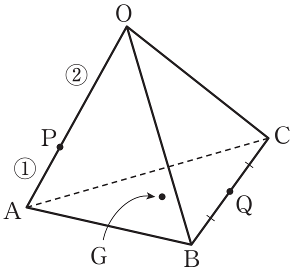
(1)　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{d}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}}$

(2)　$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{5}{12}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}}$

類題46－1

四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする．辺OAを2：1に内分する点をP，辺BCの中点をQ，△ABCの重心をGとするとき，次のベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{PQ}$　　(2)　$\overrightarrow{GQ}$



$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{a}=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OG}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

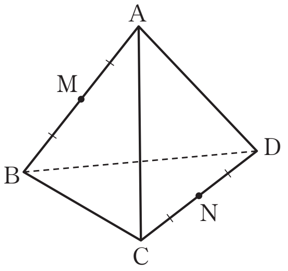
例題 46 − 2

1辺の長さが2の正四面体ABCDがある．辺AB，CDの中点をそれぞれM，Nとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．また，$\overrightarrow{MN}$ の大きさを求めよ．

(3) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}$ の値を求めよ．



(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=\mathbf{2}$

(2) (1)同様　$\vec{c}\cdot\vec{d}=2$　　$\vec{d}\cdot\vec{b}=2$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$

よって　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}$

$|\overrightarrow{MN}|^2=\left|-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}$

$=\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2^2-\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2-\frac{1}{2}\times2$

$=1+1+1-1=2$

よって　$|\overrightarrow{MN}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(3) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\vec{b}$

$=-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}$

$=-\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2$

$=\mathbf{0}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

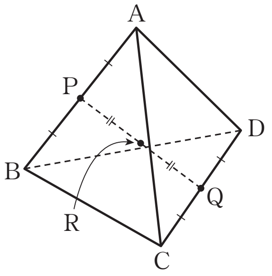
類題 46 − 2

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある．辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．また，$\overrightarrow{AR}$ の大きさを求めよ．

(3)　$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}$ の値を求めよ．



(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(2)　(1)同様　$\vec{c}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}$　　$\vec{d}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}}$$

$$|\overrightarrow{AR}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{b}|^2+\frac{1}{16}|\vec{c}|^2+\frac{1}{16}|\vec{d}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{8}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{16}\times1+\frac{1}{16}\times1+\frac{1}{16}\times1+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{16}$$

よって　$|\overrightarrow{AR}|=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$

(3)　$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}+\dfrac{1}{4}\vec{d}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$$=\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{4}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{4}\times1^2-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 46 － 3

(1)　空間の 3 点 A(3, 2, 6), B(5, −1, 4), C(x, y, 0) が同一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ.

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M，△BDE の重心を N とするとき，3 点 C，N，M は一直線上にあることを示せ.

(1)　3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する.

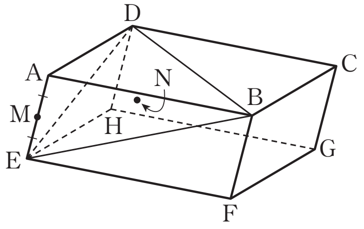
$\overrightarrow{AC}=(x-3,\ y-2,\ -6)$　　　$\overrightarrow{AB}=(2,\ -3,\ -2)$

よって　$(x-3,\ y-2,\ -6)=k(2,\ -3,\ -2)$　より

$x-3=2k,\ y-2=-3k,\ -6=-2k$

よって　$k=3$　　　したがって　$\boldsymbol{x=9,\ y=-7}$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする.



$$\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}$$　より

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)-(\vec{b}+\vec{d})$$

$$=-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}=\frac{1}{3}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})$$

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{e}-(\vec{b}+\vec{d})=-\vec{b}-\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{e}=\frac{1}{2}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})$$

よって　$\overrightarrow{CM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CN}$　より　3 点 C，N，M は一直線上にある.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 46 ー 3

(1)　空間の 3 点 A$(a, -1, 5)$，B$(4, b, -7)$，C$(5, 5, -13)$ が同一直線上にあるとき，a，b の値を求めよ．

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とするとき，3 点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ．

(1)　3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在する．

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(5-a,\ 6,\ -18)$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4-a,\ b+1,\ -12)$

よって　$(5-a,\ 6,\ -18)=k(4-a,\ b+1,\ -12)$　より

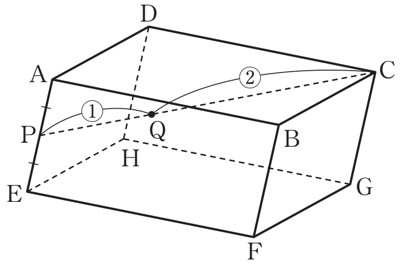
$5-a=k(4-a)$，$6=k(b+1)$，$-18=-12k$

よって　$k=\dfrac{3}{2}$　　したがって　$\boldsymbol{a=2,\ b=3}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\vec{e}+\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d})$

$=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{d}+\dfrac{1}{3}\vec{e}$

$=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$



$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　より　3 点 A，Q，G は一直線上にある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 46 ー 4
空間の 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, −1), D(1, 2, z) が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ．

4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t が存在する．

$\overrightarrow{AD}=(0,\ 2,\ z)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ -1)$

よって　$(0,\ 2,\ z)=s(-1,\ 2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ -1)$ より

$0=-s-t$　……①　　$2=2s$　……②　　$z=-t$　……③

①，②より　$s=1$，$t=-1$　　このとき③より　$\boldsymbol{z=1}$

(別解)　原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき，

$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$　を満たす実数 s，t，u が存在する．

よって　$(1,\ 2,\ z)=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ -1)$ より

$1=s$，$2=2t$，$z=-u$　　これらと $s+t+u=1$ より　$1+1-z=1$

したがって　$z=1$

類題 46 ー 4
空間の 4 点 A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5), D(−2, −1, z) が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ．

4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t が存在する．

$\overrightarrow{AD}=(-5,\ -2,\ z-2)$，$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 3)$

よって　$(-5,\ -2,\ z-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$ より

$-5=s+2t$　……①　　$-2=s+t$　……②　　$z-2=s+3t$　……③

①，②より　$s=1$，$t=-3$　　このとき③より　$\boldsymbol{z=-6}$

(別解)　原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき，

$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$　を満たす実数 s，t，u が存在する．

よって　$(-2,\ -1,\ z)=s(3,\ 1,\ 2)+t(4,\ 2,\ 3)+u(5,\ 2,\ 5)$ より

$-2=3s+4t+5u$　……①　　$-1=s+2t+2u$　……②

$z=2s+3t+5u$　……③　　$s+t+u=1$　……④

①−④×3 より　$t+2u=-5$　　②−④より　$t+u=-2$

これらより　$u=-3$，$t=1$，$s=3$

このとき③より　$z=-6$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　空間ベクトル(2)

(1)　1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC において，辺 OA，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ L，M とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア ，$\overrightarrow{LM}=-\dfrac{1}{\text{イ}}\vec{a}+\dfrac{\text{ウ}}{\text{イ}}\vec{b}+\dfrac{1}{\text{イ}}\vec{c}$，

$|\overrightarrow{LM}|=\dfrac{\text{エ}\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$ である．

また，$\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{OC}=$ キ である．

(2)　4 点 A(1，1，0)，B(3，4，5)，C(1，3，6)，D(4，5，z) が同一平面上にあるとき，$z=$ ク である．

解答例

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\times2\times\cos60^\circ=\mathbf{2}$

$\overrightarrow{OL}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　より

$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\dfrac{1}{3}\vec{a}=-\dfrac{1}{\mathbf{3}}\vec{a}+\dfrac{\mathbf{2}}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$$|\overrightarrow{LM}|^2=\left|-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right|^2$$
$$=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{1}{9}|\vec{c}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=\frac{1}{9}\times2^2+\frac{4}{9}\times2^2+\frac{1}{9}\times2^2-\frac{4}{9}\times2+\frac{4}{9}\times2-\frac{2}{9}\times2=\frac{20}{9}$$

よって　$|\overrightarrow{LM}|=\dfrac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{3}}$

$$\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{3}|\vec{c}|^2$$
$$=-\frac{1}{3}\times2+\frac{2}{3}\times2+\frac{1}{3}\times2^2=\mathbf{2}$$

(2)　4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t が存在する．

$\overrightarrow{AD}=(3，4，z)$，$\overrightarrow{AB}=(2，3，5)$，$\overrightarrow{AC}=(0，2，6)$

よって　$(3，4，z)=s(2，3，5)+t(0，2，6)$ より

$3=2s$　……①　　$4=3s+2t$　……②　　$z=5s+6t$　……③

①，②より　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=-\dfrac{1}{4}$　　このとき③より　$z=\mathbf{6}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。